

Sistemi lineari

→ risolvere un sistema lineare ad un sistema

parametrico di Cramer

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \\ \boxed{M} \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_B \quad \begin{matrix} A \\ X \end{matrix}$$

compatibile.

1) Il sistema $AX = B$ è equivalente al sistema

$A'X = B'$ ove A' e B' sono estratti da

M minore di A

con $\det(M) \neq 0$

e $M \in \mathbb{K}^{n,k}$

ove $k = rk(A) = rk(A|B)$

A considerando solo le righe intercettate

da M .

2)

$$\begin{bmatrix} \boxed{n} & | & \text{green} & | & \text{green} & | & \text{green} & | & \text{green} & | & \text{green} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{green} & | & \text{blue} & | & \text{green} & | & \text{green} & | & \text{green} & | & \text{green} \end{bmatrix}^{R_i}$$

A'

con $A' \in K^{k,n}$
 $M \in K^{k,k}$
 $\det(M) \neq 0$

$\times$

Sia X' = vettore delle incognite intercettate da M

X'' = vettore delle incognite non intercettate da M
 "columns"

A'' = matrice $(n-k) \times k$ delle colonne non int. da M .

$$[M A''] [\begin{matrix} X' \\ X'' \end{matrix}] = B' \quad \rightarrow M X' + A'' X'' = B'$$

$$M X' = B' - A'' X''$$

e dunque $X' = M^{-1} (B' - A'' X'')$.

Valori dei parametri in X'' (che sono $n-k$)
 si ottiene un vettore X' .

Interpretazione geometrica.

$$AX=B \quad \text{infinite lines} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad ax+by+c=0 \quad \text{line}$$

$$ax+by=-c$$

$c \neq 0$ sol.

$$(a,b) = (0,0)$$

$$c=0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

sol.

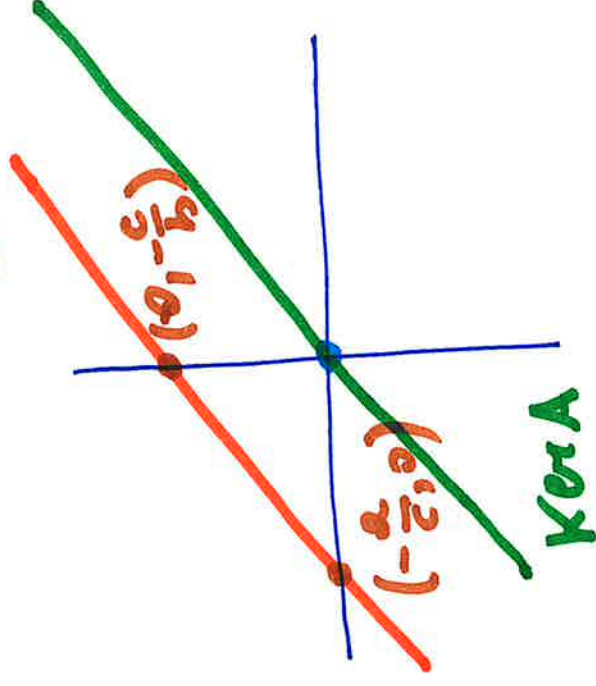
$$(a,b) \neq (0,0) \Rightarrow \exists \infty^2 \text{ sol.}$$

∞^2 solutions
line

$$(x_0, y_0) + \text{Ker } A$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

$$ax+by+c=0$$



$$\text{Ker } A = \{(x,y) : ax+by=0\}$$

$$\text{Im } f_A = ?$$

$$ax + by + c = 0$$

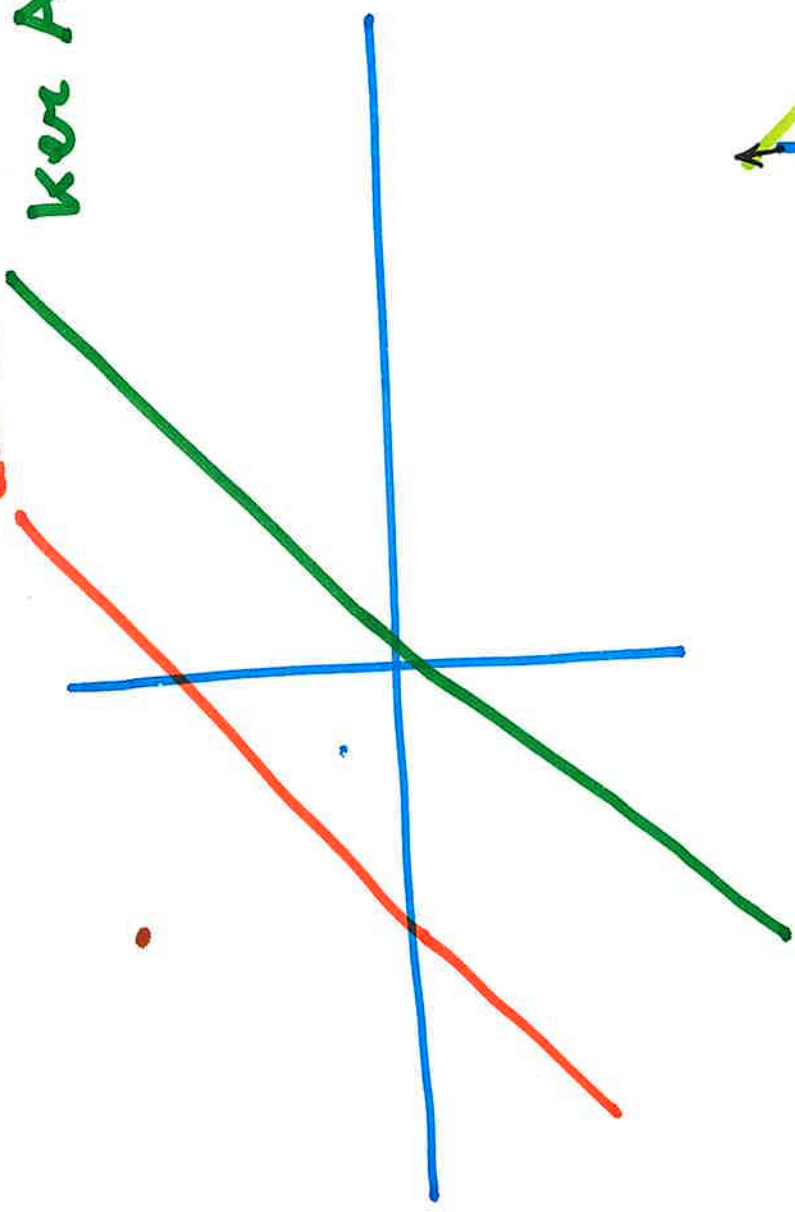
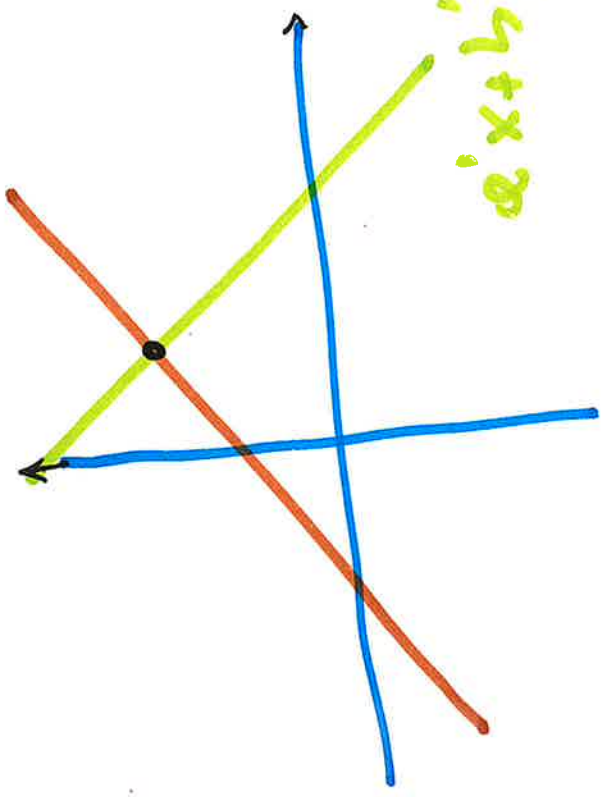
ker A

$$ax + by + c = 0$$

$$a'x + b'y + c' = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

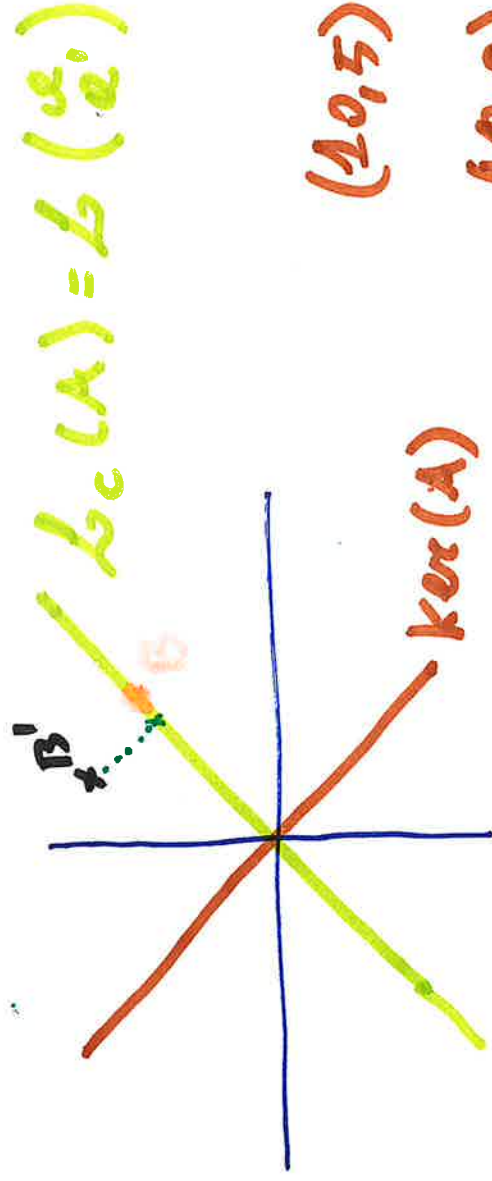
$$a'x + b'y + c' = 0$$



$AX=B$ è compatibile $\Leftrightarrow B \in \mathcal{L}_c(A)$.

supponiamo $\text{rk}(A)=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ con

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$$



$$(10, 5)$$

$$(11, 4)$$

$$(10, 0)$$

PRODOTTO SCALARE $\rightarrow$ FORMA BILINEARE SIMMETRICA

forme bilineari



$$\bar{x}, \bar{y} \in V(K)$$

$$\alpha \in K.$$

forma = funzione che ha come dominio un qualche spazio vettoriale (o prod. cartesiano di sp. vettoriali) su K e come codominio K .

bilineare $\rightarrow$ 2 vettori in ingresso e che è lineare in ognuno degli input.

$$\gamma \mapsto V(\gamma) \times V(\gamma) \rightarrow K$$

forms bilinear re

$$\gamma \in V(K) \times V(K), \forall \alpha, \beta \in K:$$

$$f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{z}) + \beta f(\bar{y}, \bar{z})$$

$$f(\bar{x}, \alpha \bar{y} + \beta \bar{z}) = \alpha f(\bar{x}, \bar{y}) + \beta f(\bar{x}, \bar{z})$$



Example

$$\{ K^2 \times K^2 \rightarrow K \}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

N.13 forma lineare $V(lk) \rightarrow lk$ ^{$\dim V(lk) = n$}
è rapp. da una matrice $1 \times n \rightarrow$ vettore.

Rappresentazione di una forma bilineare rispetto
una base $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$.

Siano $\bar{x} = \sum x_i \bar{e}_i$ ed $\bar{y} = \sum y_j \bar{e}_j \in V(lk)$
ed f una forma bilineare.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) &= f\left(\sum_i x_i \bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) = \\ &= \sum_i x_i f(\bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j) = \\ &= \sum_i x_i \sum_j y_j f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \underbrace{f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} \sum_j y_j f(\bar{e}_1, \bar{e}_j) \\ \vdots \\ \sum_j y_j f(\bar{e}_n, \bar{e}_j) \end{bmatrix} = \\
 &= [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ \vdots \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= {}^T X B Y \quad \text{con} \quad {}^T X = [x_1 \dots x_n] \\
 &\quad B = (f(\bar{e}_i, \bar{e}_j))_{i,j=1}^n
 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Q55: Come cambia una matrice rappresentativa di una forma bilineare al cambiare della base.

Supponiamo di avere 2 basi B e B'

$$x = Ax'$$

$$y = Ay'$$

e che la forma f abbia matrici B e B' rispetto le 2 basi.

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \cancel{B}^T X B Y = {}^T X' B' Y'$$

$${}^T X B Y = {}^T (AX') B (AY') =$$

$$= {}^T X' A B A Y' \Rightarrow$$

$$B' = {}^T A B A.$$

$$f: V(K) \rightarrow V(K)$$

$$\bar{x} \rightarrow f(\bar{x})$$

linear

$$b: V(K) \times V(K) \rightarrow K$$

b: linear

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ Y' &= AY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\bar{x}, \bar{y}) &= {}^t \bar{x} B \bar{y} \\ &= {}^t \bar{x}' B' \bar{y}' = \end{aligned}$$

$$= {}^t (A\bar{x}) B' (A\bar{y}) =$$

$$= {}^t \bar{x} ({}^t A B' A) \bar{y} \Rightarrow$$

$${}^t A B' A = B$$

$$y = Fx$$

$$X' = AX$$

$$Y' = AY$$

$$\Rightarrow Y' = F' X'$$

$$AY = F' AX$$

$$\Rightarrow Y = A^{-1} F' A X$$

$$A^{-1} F' A = F$$

$$0 = (y + \bar{x} \cdot y + \bar{x}) f =$$

$$= (y + \bar{x} \cdot y) f + (\bar{x} + \bar{x} \cdot y) f =$$

$$\underbrace{(y + \bar{x} \cdot y) f + (y \cdot \bar{x}) f}_{(y + \bar{x} \cdot y) f + (y \cdot \bar{x}) f} =$$

$$= (y + \bar{x} \cdot y) f + (y \cdot \bar{x}) f$$

$$\forall y, \bar{x} \in A \quad (y + \bar{x}) f = (y \cdot \bar{x}) f \quad \Leftrightarrow \text{symmetrische f als}$$

$$0 = (y + \bar{x}) f : \forall y, \bar{x} \in A \quad \text{symmetrische}$$

$$(y + \bar{x}) f = (y \cdot \bar{x}) f : \forall y, \bar{x} \in A \quad \text{symmetrische}$$

• this form bilinear and symmetric

Def: Un vettore $\bar{x} \in V(K)$ è detto isotropo per f

se $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ e $\bar{x} \neq 0$.

Una forma bilineare è detta degenera se

$\exists \bar{z} \in V(K)$ tale che $\bar{z} \neq 0$ e $\forall \bar{x} \in V(K): f(\bar{z}, \bar{x}) = 0$

In generale ci incontriamo forme bilineari non degeneri.

oss: Una forma bilineare f è simmetrica $\Leftrightarrow$ ogni matrice B che la rappresenta è simmetrica,

cioè ${}^t B = B$.

Dim: f simmetrica $\Leftrightarrow \forall i, j \quad f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f(\bar{e}_j, \bar{e}_i) \Leftrightarrow b_{ij} = b_{ji}$

$f(\bar{x}, \bar{y}) = {}^t X B Y = ({}^t X B Y)^t = Y^t B X = f(\bar{y}, \bar{x})$
e $B = {}^t B$

f è alternante se

$$-1 \neq +1 \Leftrightarrow {}^t B = -B$$

$$-1 = +1 \Leftrightarrow {}^t B = B \text{ e le entrate sulla diag.}$$

principale sono $= 0$.

oss: f è non degenera $\Leftrightarrow \ker A = \{0\}$

Se $\ker A$ è non banale $\Rightarrow \exists y: Ay = 0$

$$ey \neq 0 \Rightarrow A \in K^n: {}^t X Ay = {}^t X 0 = 0$$

$\Rightarrow f$ è degenera.

viceversa, supponiamo $Ay \neq 0: Ay \neq 0$

$\Rightarrow$ esiste almeno una componente g_i in Ay diversa

$$\text{da } 0 \quad [0 \dots 0 \dots 0] \quad \uparrow \quad i$$

$\square$

Def: Si dice prodotto scalare una forma bilineare simmetrica su $V(K)$.
(non degenerata).

prodotto per scalare

$$K \times V \rightarrow K$$

$$(\alpha, \bar{v}) \rightarrow \alpha \bar{v}$$

prodotto scalare

$$V \times V \rightarrow K$$

$$\bar{v}, \bar{w} \rightarrow f(\bar{v}, \bar{w})$$

$$\bar{v} \cdot \bar{w}$$

$$\langle \bar{v} | \bar{w} \rangle$$

$\langle \bar{v} | = \text{vettore riga}$

$|w\rangle$ vettore colonna

$\langle \bar{v} | \bar{w} \rangle = \text{scalare riga} \times \text{colonna}$

$| \bar{w} \rangle \langle \bar{v} |$ matrice $n \times n$

"

n

$$\langle \bar{x} | w \rangle \langle \bar{v} | = \alpha \langle \bar{v} |$$

$$|w\rangle \langle \bar{v} | z \rangle$$

$$\langle x | \langle w |$$

$$|z\rangle |x\rangle$$